Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Oradea, 18 aprilie 2011

CLASA a VIII-a – BAREMURI

Problema 1. Deteterminaţi numerele $x, y, z, t \in [0, \infty)$ ştiind că verifică simultan relaţiile

$$x + y + z \leq t,\ x^2 + y^2 + z^2 \geq t \text{ şi } x^3 + y^3 + z^3 \leq t.$$

Soluţie

Adunând membru cu membru inegalităţile
$x + y + z \leq t$, $-2x^2 - 2y^2 - 2z^2 \leq -2t$ şi $x^3 + y^3 + z^3 \leq t$, obţinem că $x(1-x)^2 + y(1-y)^2 + z(1-z)^2 \leq 0$ .... **3 p**
Cum $x, y, z \in [0, \infty)$, rezultă că $x, y, z \in \{0, 1\}$ .... **2 p**

Dacă $x = y = z = 0$ rezultă $t = 0$.
Dacă exact două dintre numerele x, y, z sunt nule, atunci $1 \leq t$ şi $1 \geq t$, prin urmare $t = 1$, $(x, y, z) \in \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.
Dacă exact unul dintre numerele x, y, z este nul, atunci $2 \leq t$ şi $2 \geq t$, deci $t = 2$, $(x, y, z) \in \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$.
Dacă $x = y = z = 1$, deducem că $t = 3$ .... **2 p**

Problema 2. Fie a, b, c numere întregi nenule, distincte două câte două.

a) Demonstraţi că $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq 9$.

b) Dacă, în plus, $ab + ac + bc + 3 = abc > 0$, arătaţi că

$$(a-1)(b-1) + (a-1)(c-1) + (b-1)(c-1) \geq 6.$$

Soluţie

a) Măcar unul dintre numerele a, b, c are modulul cel puţin egal cu 2, prin urmare $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 9$ .... **3 p**

b) Inegalitatea de demonstrat revine succesiv la
$ab + ac + bc - 2(a + b + c) + 3 \geq 6 \Leftrightarrow ab + ac + bc - 3 \geq 2(a + b + c) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (ab + ac + bc - 3)(ab + ac + bc + 3) \geq 2abc(a + b + c) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (ab + ac + bc)^2 - 9 \geq 2abc(a + b + c) \Leftrightarrow a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq 9$, adică tocmai relaţia demonstrată la **a)** .... **4 p**

Problema 3. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară regulată cu baza ABC de centru O. Punctele I şi H sunt centrul cercului înscris şi respectiv ortocentrul triunghiului VBC. Ştiind că $AH = 3 \cdot OI$, determinaţi măsura unghiului dintre muchia laterală a piramidei şi planul bazei.

Soluţie

Fie M mijlocul muchiei $[BC]$. Deoarece triunghiul VBC este isoscel cu $VB = VC$, rezultă că punctele V, H, I şi M sunt coliniare. Se demonstrează

că $AH\perp(VBC)$, deci $AH\perp VM$ . ... **2 p**
Fie I' proiecţia punctului O pe planul (VBC); atunci $I'\in VM$ şi $OI'\parallel AH$. Din teorema fundamentală a asemănării obţinem $\frac{OI'}{AH}=\frac{MO}{MA}=\frac{1}{3}$, deci $AH=3\cdot OI'$. Dacă $I\neq I'$, atunci $\frac{AH}{3}=OI'<OI=\frac{AH}{3}$, fals. Rămâne că $I=I'$. .... **2 p**
Cum $OI\perp(VBC)$ şi I este centrul cercului înscris în triunghiul VBC, rezultă că O este egal depărtat de VB şi BC. .... **1 p**
Fie J proiecţia punctului O pe dreapta VB. Atunci $OJ=OM$, deci triunghiurile dreptunghice OJB şi OMB sunt congruente. (I. C.) Rezultă că $m\left(\widehat{VB,(ABC)}\right)=m(\angle VBO)=m(\angle MBO)=30^\circ$ . ... **2 p**

Problema 4. Un număr natural se numeşte *tipic* dacă suma cifrelor din scrierea sa în baza 10 este multiplu al numărului 2011.

a) Arătaţi că există o infinitate de numere tipice care au, fiecare, cel puţin câte 2011 multipli care sunt, la rândul lor, numere tipice.

b) Există un număr tipic pentru care orice multiplu nenul al său este număr tipic?

Soluţie

a) Un exemplu corect. .... **2 p**

b) Fie n un număr tipic şi $S(n)$ suma cifrelor sale, cu $S(n)=M2011$. Se demonstrează că n are un multiplu de forma $m=\underbrace{99...9}_{l}\underbrace{00...0}_{k}$, despre care să presupunem că este număr tipic, adică $9l=M2011$ . ... **3 p**
Numărul $M=\left(10^{l+1}-1\right)\cdot m=10^{l+1}\cdot m-m=\underbrace{99...9}_{l-1}89\underbrace{00...0}_{l-1}1\underbrace{00...0}_{k}$ este multiplu al lui m (deci şi al lui n) şi are suma cifrelor $S(m)+9\neq M2011$. În concluzie, nu există un număr tipic ai cărui multipli să fie toţi tipici. **2 p**